

一、选择题

1.B 2.A 3.C 4.B 5.D 6.D
7.D 8.B 9.A 10.C 11.C 12.A

二、填空题

13. $2+i$ 14. $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$ 15. 2018 16. 4

三、解答题

17. 证明:假设函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - a$ ($x > 0$) 有零点,2 分

则 $a = \frac{1}{3}x^3 - x^2$ 在 $(0, +\infty)$ 上有解,4 分

设 $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2$, $g'(x) = x^2 - 2x$ ($x > 0$), 即 $g(x)$ 在 $(0, 2)$ 上单调递减, 在 $(2, +\infty)$ 上单调递增,

$\therefore g(x) \geq g(2) = -\frac{4}{3}$ 8 分

$\therefore a \geq -\frac{4}{3}$, 但这与条件 $a < -\frac{4}{3}$ 矛盾, 故假设不成立, 原命题得证。10 分

18. 解: (1) 设 $z = a + bi$ 则 $z + 3 - i = a + 3 + (b-1)i$, $\frac{z}{1+i} = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}i$ 2 分

由题意得: $b-1=0$, $b-a=0$ 4 分

$\therefore a=b=1$, $z=1+i$ 6 分

(2) $(z+ai)^2 = (1+i+ai)^2 = -a^2 - 2a + (2+2a)i$ 8 分

因为 $(z+ai)^2$ 在复平面上的对应的点在第二象限 所以 $\begin{cases} -a^2 - 2a < 0 \\ 2+2a > 0 \end{cases}$,10 分

即 $a > 0$ 12 分

19. 解: (1) 直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = 1 + \frac{t}{2} \\ y = 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases}$, (t 为参数);3 分

(2) 把直线 l 的参数方程代入直线 $x + y + 1 = 0$, 得 $t = -4(\sqrt{3} - 1)$

所以交点到点 P 的距离为: $|t| = 4(\sqrt{3} - 1)$;6 分

(3) 将直线 l 的参数方程代入圆的方程 $x^2 + y^2 = 9$, 化简得:

$$t^2 + (2\sqrt{3} + 1)t - 4 = 0$$

$$t_1 + t_2 = -(2\sqrt{3} + 1), t_1 t_2 = -4 \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$|t_1| + |t_2| = |t_1 - t_2| = \sqrt{(t_1 + t_2)^2 - 4t_1 t_2} = \sqrt{29 + 4\sqrt{3}}.$$

.....12 分

20. (1) 列联表如下:

	跑步	打球	合计/人
40 岁以上 (人)	42	28	70
40 岁以下 (人)	18	32	50
合计 (人)	60	60	120

.....4 分

(2) 假设“运动方式与年龄无关”，

$$\text{由公式算得 } K^2 = \frac{120 \times (42 \times 32 - 28 \times 18)^2}{70 \times 50 \times 60 \times 60} = 6.72 \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{比较 } P(K^2 \geq 6.635) = 0.010, \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

所以有理由认为假设“运动方式与年龄无关”是不合理的, 即在犯错误的概率不超过 0.01 的前提下认为“运动方式与年龄有关”.
.....12 分

$$21. \text{解: (1) 曲线 } C \text{ 的极坐标方程为 } \rho^2 - 4\rho \cos \theta - 6\rho \cos \theta + 12 = 0 \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{把 } \theta = \frac{\pi}{4} \text{ 代入曲线 } C \text{ 的极坐标方程得: } \rho^2 - 5\sqrt{2}\rho + 12 = 0$$

$$\rho_1 + \rho_2 = 5\sqrt{2}, \rho_1 \rho_2 = 12 \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\therefore |AB| = \sqrt{(\rho_1 + \rho_2)^2 - 4\rho_1 \rho_2} = \sqrt{2} \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 点 } P \text{ 到直线 } AB \text{ 的距离为 } d = 2 \sin \frac{\pi}{4} = \sqrt{2} \quad \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\therefore S_{\triangle ABP} = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 1 \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

$$22. \text{解: (1) 曲线 } C \text{ 的参数方程为 } \begin{cases} x = \cos \theta \\ y = 2 \sin \theta \end{cases} (\theta \text{ 为参数}); \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{直线 } l \text{ 的普通方程: } x + y - 4 = 0; \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 设 } P(\cos \theta, 2 \sin \theta) \text{ 则 } P \text{ 到直线的距离 } d = \frac{|\cos \theta + 2 \sin \theta - 4|}{\sqrt{2}}, \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{那么 } |\mathbf{PA}| = \frac{d}{\sin 30^\circ} = 2d = \sqrt{2} |\sqrt{5} \sin(\theta + \varphi) - 4| \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{所以当 } \sin(\theta + \varphi) = -1 \text{ 时 } |\mathbf{PA}| \text{ 有最大值为 } 4\sqrt{2} + \sqrt{10}, \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{此时 } P \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{4\sqrt{5}}{5} \right). \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

$$23、\text{解： (I) } f(x) = \begin{cases} -3x, & (x \leq -2) \\ -x+4, & (-2 < x \leq 1), \\ 3x, & (x > 1) \end{cases} \quad \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\text{令 } -x+4=5 \text{ 或 } 3x=5,$$

$$\text{得 } x=-1, \quad x=\frac{5}{3}, \text{ 所以, 不等式 } f(x) < 5 \text{ 的解集是 } \left\{ x \mid -1 < x < \frac{5}{3} \right\}. \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{(II) } f(x) \text{ 在 } (-\infty, 1] \text{ 上递减, } [1, +\infty) \text{ 递增, 所以, } f(x) \geq f(1) = 3, \quad \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\text{由于不等式 } f(x) < |a+4| \text{ 的解集是非空的集合, 所以 } |a+4| > 3, \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{解之, } a < -7 \text{ 或 } a > -1, \text{ 即实数 } a \text{ 的取值范围是 } (-\infty, -7) \cup (-1, +\infty). \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$